Estadística Empresarial

3. Variables Aleatorias

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Como se estudió en la Unidad Didáctica anterior, los sucesos se presentan con unas determinadas probabilidades. El problema que se plantea es que con los sucesos hay ciertas operaciones algebraicas que no se pueden realizar (no se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir). Para solucionar este problema en esta Unidad Didáctica se presentan las variables aleatorias que consisten en asociar a cada suceso elemental un número real. La probabilidad se mantiene, es decir, la probabilidad asociada al número real es la misma que la probabilidad asociada al suceso elemental correspondiente. Por tanto, esta Unidad Didáctica está basada en la Unidad Didáctica anterior.

Las variables aleatorias presentan la ventaja frente a los sucesos de que con los números reales si se pueden realizar todas las operaciones algebraicas indicadas anteriormente y con los sucesos no. Al estudio de dichas variables se dedica esta Unidad Didáctica.

PROPÓSITOS

Los principales propósitos de esta Unidad Didáctica son:

- Entender el concepto de variable aleatoria.
- Distinguir entre variables aleatorias discretas y continuas.
- Aprender a calcular probabilidades asociadas a variables aleatorias.
- Calcular las medidas que caracterizan a las variables aleatorias y saber interpretarlas.
- Saber utilizar las principales distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Las variables aleatorias se clasifican en dos grupos: discretas y continuas. En primer lugar, se estudian las variables discretas que toman valores aislados. Dichas variables se pueden representar mediante dos funciones: la distribución de probabilidad y la función de distribución. A continuación, se consideran las variables continuas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo. Estas variables se pueden representar mediante la función de densidad y la función de distribución. Finalmente, se presentan las principales distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

En esta Unidad Didáctica aprenderás a identificar si una variable es discreta o continua, obtener probabilidades referentes a la misma, calcular las principales medidas que la caracterizan, e interpretar correctamente todos los resultados obtenidos.

1. CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

En la unidad didáctica 2, se presentaron los conceptos de espacio muestral y suceso elemental. El espacio muestral, que se representa por E, es el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados del experimento aleatorio. Un suceso elemental es el que está formado por un solo elemento del espacio muestral. En dicha unidad también se estudió la probabilidad que es una medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos que dependen del azar.

Una variable aleatoria, que se representará por ξ, es una función que asocia a cada suceso elemental w un número real.

$$\begin{aligned} \xi : E &\rightarrow R \\ w &\rightarrow \xi(w) \end{aligned}$$

Cada valor de la variable aleatoria tiene una probabilidad asociada que es la misma que la probabilidad del suceso elemental correspondiente. A las probabilidades asociadas a cada valor de la variable aleatoria se les llama probabilidades inducidas.

Las variables aleatorias se definen porque es más sencillo trabajar con números reales que con sucesos, ya que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir y los sucesos no.

Ejemplo 1. Lanzamos una moneda una vez y consideramos la variable aleatoria ξ = “Número de caras obtenidas”.

a) Determinar el espacio muestral.
b) Explicar que número se asocia a cada suceso elemental.
c) Determinar las probabilidades inducidas.

a) El espacio muestral, es decir, el conjunto de posibles resultados de este experimento aleatorio esta formado por dos elementos cara y cruz.

$$E = \{C, X\}$$

b) La variable aleatoria se define como “Número de caras obtenidas”. Por tanto, al suceso cruz se le asocia el número real 0 (si sale cruz, no sale ninguna cara) y al suceso cara el número real 1.

$$\begin{aligned} &\xi : E \to R \\ &\quad X \to \xi(X) = 0 \\ &\quad C \to \xi(C) = 1 \end{aligned}$$

c) Cada suceso elemental tiene una probabilidad que se mantiene:

La probabilidad de que salga cruz es $1/2$. Al suceso cruz se le asocia el número 0. Por tanto, la probabilidad de que la variable tome valor 0 es $1/2$.

La probabilidad de que salga cara es $1/2$. Al suceso cara se le asocia el número real 1. Por tanto, la probabilidad de que la variable tome valor 1 es $1/2$.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(\xi = 0) = 1/2 \\ P(C) &= P(\xi = 1) = 1/2 \end{aligned}$$

Se distinguen dos tipos de variables aleatorias:

- **Variables aleatorias discretas:** son aquellas que toman valores aislados.

Ejemplo 2. Se lanza un dado una vez y se considera la variable aleatoria ξ= “Puntuación obtenida”.

La variable es discreta, puesto que puede tomar valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y no puede tomar ningún valor entre dos consecutivos dados.

- **Variables aleatorias continuas:** son aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo.

Ejemplo 3. La longitud de una pieza es aleatoria debido a ciertos errores en el proceso de fabricación de la misma. Oscila entre un valor mínimo de 2 centímetros y un valor máximo de 3 centímetros. La variable aleatoria ξ= “Longitud de la pieza” es continua, ya que puede tomar cualquier valor en el intervalo $[2,3]$.

2. VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Como se acaba de exponer en la sección anterior, una variable aleatoria discreta es aquella que toma valores aislados. En esta sección se estudian estas variables. El análisis se divide en tres partes.

En primer lugar, se consideran las funciones que se utilizan para representar una variable discreta: la función de masa o distribución de probabilidad y la función de distribución. Se prestará especial atención a la diferencia conceptual que existe entre ellas.

A continuación, se analiza el cálculo de probabilidades en variable discreta. Dicho cálculo se puede realizar con las dos funciones anteriormente citadas. Se explicará que procedimiento se sigue para calcular las probabilidades con cada una de estas funciones.

Por último, se presentan las principales medidas que caracterizan a una variable aleatoria discreta: la esperanza, la varianza y la desviación típica.

FUNCIÓN DE MASA O DE CUANTÍA

La función de masa o de cuantía es la función que asocia a cada valor de la variable aleatoria su probabilidad.

$$
\begin{aligned}
f : R &\to [0,1] \\
x_i &\to f(x_i) = p(\xi = x_i)
\end{aligned}
$$

Por tanto, asocia a cada número real x una imagen que es la probabilidad de que la variable tome ese valor.

Propiedades:

1. Las probabilidades están entre 0 y 1.

$$0 \leq p(\xi = x_i) \leq 1$$

2. La suma de todas las probabilidades puntuales es igual a la unidad.

$$\sum p(\xi = x_i) = 1$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

La distribución de probabilidad es otra forma alternativa de representar la probabilidad puntual. En lugar de utilizar una función, se colocan las probabilidades en una tabla.

La distribución de probabilidad está formada por los valores que toma la variable acompañados de sus correspondientes probabilidades. En la primera fila se colocan los valores que puede tomar la variable ordenados de menor a mayor y en la segunda las probabilidades puntuales correspondientes a cada valor.

La función de cuantía o distribución de probabilidad proporciona la probabilidad puntual.

Ejemplo 4. Se lanza una moneda una vez y se considera la variable aleatoria ξ = "Número de caras obtenidas". Determinar la distribución de probabilidad de la variable.

Como se ha expuesto en el ejemplo 1, dicha variable aleatoria toma valores 0 y 1 con probabilidad1/2 en ambos casos. Por tanto, la distribución de probabilidad de la variable es:

$\xi = x_i$	0	1
$P(\xi = x_i)$	1/2	1/2

Obsérvese que las probabilidades están entre 0 y 1 y que la suma de probabilidades es igual a 1.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

La función de distribución de una variable aleatoria, que se representará por $F(x)$, es tal que:

$$\begin{aligned} F: R &\to [0,1] \\ x &\to F(x) = p(\xi \le x) \end{aligned}$$

Por tanto, asocia a cada número real x una imagen que es la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x.

Si la variable aleatoria es discreta, el valor de la función de distribución en un punto x se genera sumando la probabilidad de que la variable tome ese valor x, si existe en el probabilidad, y las probabilidades correspondientes a todos los valores que son menores que x. Por consiguiente,

$$F(x) = p(\xi \le x) = \sum_{x_i \le x} p(\xi = x_i)$$

La función de distribución particularizada en un valor proporciona la probabilidad acumulada hasta ese valor.

Ejemplo 5. Se lanza una moneda una vez y se considera la variable aleatoria ξ = "Número de caras obtenidas". Determinar la función de distribución de la variable aleatoria.

Para obtener la función de distribución nos basaremos en la distribución de probabilidad de la variable. La variable toma valores 0 y 1 con probabilidad ½ en ambos casos (ver ejemplo 4).

La función de distribución hay que definirla para todos los números reales.

El primer tramo a considerar es siempre antes de que la variable empiece a tomar valores. En este caso cualquier número menor que 0.

$$x < 0 \qquad F(x) = P(\xi \leq x) = 0$$

La probabilidad acumulada hasta x siendo x cualquier número menor que 0 es cero, porque la variable no toma valores menores que 0.

El siguiente tramo es:

$$0 \leq x < 1 \qquad F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) = \frac{1}{2}$$

La probabilidad acumulada hasta x siendo x un número que pertenece al intervalo $[1, 2)$ es 1/2, ya que hasta ese punto la probabilidad existente es la que corresponde a $\xi = 1$.

El último tramo es:

$$x \geq 1 \qquad F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La probabilidad acumulada hasta x siendo x un número que pertenece al intervalo $[1, \infty)$ es 1, ya que se ha llegado al último valor que puede tomar la variable.

Por tanto, la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Si se quiere calcular probabilidades, se puede emplear la distribución de probabilidad y la función de distribución. A continuación, se explica como se calculan probabilidades con estas dos funciones.

Cálculo de probabilidades con la distribución de probabilidad

Se suman las probabilidades puntuales de todos los valores que puede tomar la variable en el intervalo considerado.

Cálculo de probabilidades con la función de distribución

La función de distribución particularizada en un punto nos proporciona la probabilidad de que la variable tome ese valor o cualquiera de los que se encuentren a su izquierda.

A continuación, se explica como se calcula la probabilidad en los diferentes tipos de intervalos. En algunos casos será necesario utilizar la función de distribución y la distribución de probabilidad, ya que solo con la función de distribución no es posible calcular la probabilidad.

Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. La probabilidad en a o a su izquierda se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi \leq a) = F(a)$$

En este caso simplemente hay que particularizar la función de distribución en a.

La probabilidad a la izquierda de a (sin incluir la probabilidad en a) se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi < a) = p(\xi \le a) - p(\xi = a) = F(a) - p(\xi = a)$$

$F(a)$ es la probabilidad en a o a su izquierda. Si se le resta la probabilidad en a, se obtiene la probabilidad a la izquierda de a.

La probabilidad a la derecha de a, sin incluir la probabilidad en a, se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi > a) = 1 - p(\xi \le a) = 1 - F(a)$$

Para calcular esta probabilidad se ha tenido en cuenta que la probabilidad de un suceso es igual a uno menos la probabilidad del suceso contrario.

La probabilidad en a o a su derecha se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi \ge a) = 1 - p(\xi < a) = 1 - \left[\, F(a) - p(\xi = a) \,\right] = 1 - F(a) + p(\xi = a)$$

Para calcular esta probabilidad se ha tenido en cuenta que:

1. La probabilidad de un suceso es igual a uno menos la probabilidad del suceso contrario.
2. La probabilidad a la izquierda de a (sin incluir la probabilidad en a) es $F(a)$ menos la probabilidad puntual en a.

La probabilidad entre a y b (incluyendo la probabilidad en b, pero no en a) se calcula de la siguiente forma:

$$p(a < \xi \leq b) = p(\xi \leq b) - p(\xi \leq a) = F(b) - F(a)$$

Si a la probabilidad en b o a su izquierda $F(b)$, se le resta la probabilidad en a o a su izquierda $F(a)$, se obtiene la probabilidad en el intervalo considerado.

.La probabilidad entre a y b (sin incluir las probabilidades en a y en b) se calcula de la siguiente forma:

$$p(a < \xi < b) = p(\xi \leq b) - p(\xi \leq a) - p(\xi = b) = F(b) - F(a) - p(\xi = b)$$

Si a la probabilidad en b o a su izquierda $F(b)$, se le resta la probabilidad en a o a su izquierda $F(a)$ y la probabilidad puntual en b, se obtiene la probabilidad en el intervalo considerado.

La probabilidad entre a y b (incluyendo las probabilidades en a y en b) se calcula de la siguiente forma:

$$p(a \leq \xi \leq b) = p(\xi \leq b) - p(\xi \leq a) + p(\xi = a) = F(b) - F(a) + p(\xi = a)$$

Si a la probabilidad en b o a su izquierda $F(b)$, se le resta la probabilidad en a o a su izquierda $F(a)$ y se le suma la probabilidad puntual en a, se obtiene la probabilidad en el intervalo considerado.

La probabilidad entre a y b (incluyendo la probabilidad en a, pero no en b) se calcula de la siguiente forma:

$$p(a < \xi \leq b) = p(\xi \leq b) - p(\xi \leq a) - p(\xi = b) + p(\xi = a) = F(b) - F(a) - p(\xi = b) + p(\xi = a)$$

Si a la probabilidad en b o a su izquierda $F(b)$, se le resta la probabilidad en a o a su izquierda $F(a)$ y se le suma la probabilidad puntual en a, se obtiene la probabilidad en el intervalo considerado.

Por tanto, se tiene que:

$$p(\xi \leq a) = F(a)$$

$$p(\xi < a) = F(a) - p(\xi = a)$$

$$p(\xi > a) = 1 - F(a)$$

$$p(\xi \geq a) = 1 - F(a) + p(\xi = a)$$

$$p(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$p(a < \xi < b) = F(b) - F(a) - p(\xi = b)$$

$$p(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) + p(\xi = a)$$

$$p(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) - p(\xi = b) + p(\xi = a)$$

A continuación, se presentan las principales medidas que caracterizan a una variable aleatoria discreta: la esperanza, la varianza y la desviación típica.

ESPERANZA MATEMÁTICA O VALOR ESPERADO

La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta, que se representa por μ o por $E(\xi)$, es la suma de los valores que puede tomar la variable multiplicados por las probabilidades correspondientes a cada valor.

$$\mu = E(\xi) = \sum x_i \ p(\xi = x_i)$$

Ejemplo 6. Se lanza una moneda una vez y se considera la variable aleatoria ξ = "Número de caras obtenidas". Determinar la esperanza de la variable.

Como se ha expuesto en el ejemplo 1, dicha variable aleatoria toma valores 0 y 1 con probabilidad 1/2 en ambos casos.

Por tanto, su esperanza es:

$$\mu = E(\xi) = \sum x_i \ p(\xi = x_i) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Propiedades de la esperanza

1. La esperanza de una constante es igual a la constante.

$$E(c) = c$$

2. La esperanza de una constante por una variable aleatoria es igual a la constante por la esperanza de la variable aleatoria.

$$E(c\xi) = cE(\xi)$$

3. La esperanza de una suma o resta de variables aleatorias es igual a la suma o resta de las esperanzas.

$$E(\xi_1 \pm \xi_2) = E(\xi_1) \pm E(\xi_2)$$

VARIANZA

La varianza de una variable aleatoria discreta, que se representa por σ^2 o por $V(\xi)$, es la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores que puede tomar la variable respecto a la esperanza multiplicados por sus correspondientes probabilidades.

$$\sigma^2 = V(\xi) = \sum (x_i - \mu)^2 p(\xi = x_i)$$

Desarrollando el cuadrado de la última expresión se puede obtener otra expresión para la varianza que facilita el cálculo de la misma.

$$\sigma^2 = V(\xi) = \sum x_i^2 p(\xi = x_i) - E(\xi)^2$$

La varianza mide la dispersión, es decir, la proximidad o alejamiento de los valores que puede tomar la variable con respecto a la esperanza. Cuanto mayor sea la dispersión, mayor será la varianza y, por tanto, menos representativa será la esperanza.

Ejemplo 7. Se lanza una moneda una vez y se considera la variable aleatoria ξ = “Número de caras obtenidas”. Determinar la varianza de la variable.

Como se ha expuesto en el ejemplo 1, dicha variable aleatoria toma valores 0 y 1 con probabilidad 1/2 en ambos casos.

Por tanto, su varianza es:

$$V(\xi) = \sigma^2 = \sum x_i^2 p(\xi = x_i) - E(\xi)^2 = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Propiedades de la varianza

1. La varianza es siempre mayor o igual que 0.

$$V(\xi) \geq 0$$

2. La varianza de una constante es nula.

$$V(c) = 0$$

3. La varianza de una constante por una variable aleatoria es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable aleatoria.

$$V(c\xi) = c^2 V(\xi)$$

DESVIACIÓN TÍPICA

La desviación típica, que se representará por σ, se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = +\sqrt{V(\xi)}$$

Esta medida presenta la ventaja frente a la varianza de estar expresada en las mismas unidades que la variable aleatoria.

Ejemplo 8. Se lanza una moneda una vez y se considera la variable aleatoria ξ = "Número de caras obtenidas". Determinar la desviación típica de la variable.

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por tanto, teniendo en cuenta el resultado obtenido en el ejemplo 7 se tiene que:

$$\sigma = +\sqrt{V(\xi)} = +\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Obsérvese que la esperanza, la varianza y la desviación típica de una variable aleatoria discreta se determinan a partir de su distribución de probabilidad.

3. VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Como se indicó en la sección 1, una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar cualquier valor en un intervalo. En esta sección se estudian estas variables. El análisis se divide en tres partes.

En primer lugar, se consideran las funciones que se utilizan para representar una variable continua: la función de densidad y la función de distribución. Se prestará especial atención a la diferencia conceptual que existe entre ellas.

A continuación, se analiza el cálculo de probabilidades en variable continua. Dicho cálculo se puede realizar con las dos funciones anteriormente citadas. Se explicará que procedimiento se sigue para calcular las probabilidades con cada una de estas funciones.

Por último, se presentan las principales medidas que caracterizan a una variable aleatoria continua: la esperanza, la varianza y la desviación típica.

FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para explicar la función de densidad es necesario definir previamente el concepto de densidad de probabilidad en un intervalo.

La densidad de probabilidad existente en un intervalo es el cociente entre la probabilidad de que la variable tome valores en ese intervalo y la amplitud del mismo.

La función de densidad, que se representa por $f(x)$, nos indica la densidad de probabilidad existente en un intervalo de amplitud infinitesimal.

Consideramos el intervalo $(x, x+h]$ cuya amplitud es h. La función de densidad será el límite cuando la amplitud del intervalo tiende a 0 del cociente entre la probabilidad de que la variable tome valores en el intervalo y la amplitud del mismo.

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x < \xi \leq x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

Dicho límite es la derivada primera de la función de distribución.

Propiedades

1. La función de densidad siempre es mayor o igual que cero.

$$f(x) \geq 0$$

2. El área bajo la función de densidad es igual a la unidad.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Como se vio en la sección 2 de esta unidad didáctica, la función de distribución de una variable aleatoria, que se representará por $F(x)$, es tal que:

$$\begin{aligned} F : R &\to [0,1] \\ x &\to F(x) = p(\xi \leq x) \end{aligned}$$

Por tanto, asocia a cada numero real x una imagen que es la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x.

El procedimiento para generar la función de distribución de una variable aleatoria continua en un punto x consiste en determinar la integral definida de la función de densidad en el intervalo $(-\infty, x]$.

$$F(x) = p(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Para ello es necesario tener en cuenta si la función de densidad viene definida por una única expresión algebraica en dicho intervalo o no. En el caso de que la función no venga definida por una única expresión algebraica, habrá que considerar tantos subintervalos como expresiones algebraicas definan a $f(x)$.

Ejemplo 9. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Obtener la función de distribución.

Si x es un valor menor que 0, la función de densidad viene definida por una única expresión algebraica en el intervalo $(-\infty, x]$, puesto que:

Si $x < 0 \;\; f(x) = 0$

Por tanto, se tiene que:

$$x < 0 \quad F(x) = p(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

Si x es un valor que pertenece al intervalo $[0, 3]$, la función de densidad no viene definida por una única expresión algebraica en el intervalo $(-\infty, x]$, puesto que:

Si $x < 0 \;\; f(x) = 0$

Si $0 \le x \le 3 \;\; f(x) = \dfrac{1}{3}$

Por tanto, hay que considerar dos subintervalos:

$$0 \le x \le 3 \quad F(x) = p(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{3}\, dt = \frac{1}{3}[t]_{0}^{x} = \frac{1}{3}x$$

Si x es un valor mayor que 3, la función de densidad no viene definida por una única expresión algebraica en el intervalo $(-\infty, x]$, puesto que:

Si $x < 0 \ \ f(x) = 0$

Si $0 \le x \le 3 \ \ f(x) = \frac{1}{3}$

Si $x > 3 \ \ f(x) = 0$

Por tanto, hay que considerar tres subintervalos:

$$x > 3 \quad F(x) = p(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{3} \frac{1}{3}\, dt + \int_{3}^{x} 0\, dt = \frac{1}{3}[t]_{0}^{3} = 1$$

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3}x & 0 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

CALCULO DE PROBABILIDADES

Si se quiere calcular probabilidades, se puede emplear la función de densidad y la función de distribución. A continuación se explica como se calculan probabilidades con estas dos funciones.

Cálculo de probabilidades a partir de la función de densidad

Si se quiere determinar la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome valores en un intervalo, se calcula la integral definida de la función en dicho intervalo.

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome valores en el intervalo $(a, b]$, se calcula de la siguiente forma:

$$p(a < \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome valores en el intervalo $[-\infty, a]$, se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome valores en el intervalo $[a, \infty]$, se calcula de la siguiente forma:

$$p(\xi \geq a) = \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

Proposición:

Las probabilidades puntuales son nulas para una variable aleatoria continua

Demostración.

$$p(\xi = a) = \int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Por tanto, se tiene que:

$$p(a < \xi \leq b) = p(a < \xi < b) =$$

$$= p(a \leq \xi \leq b) = p(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$p(\xi \leq a) = p(\xi < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

$$p(\xi > a) = p(\xi \geq a) = \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

Cálculo de probabilidades a partir de la función de distribución.

Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Como se acaba de exponer, las probabilidades son nulas en variable continua. Por tanto, se tiene que:

$$p(a < \xi \leq b) = p(a < \xi < b) = p(a \leq \xi \leq b) = p(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

$$p(\xi \leq a) = p(\xi < a) = F(a)$$

$$p(\xi > a) = p(\xi \geq a) = 1 - F(a)$$

La explicación de estas expresiones se ha presentado en la sección 2 de esta unidad didáctica.

A continuación, se presentan las principales medidas que caracterizan a una variable aleatoria continua: la esperanza, la varianza y la desviación típica.

ESPERANZA MATEMÁTICA O VALOR ESPERADO

La esperanza matemática de una variable aleatoria continua, que se representa por μ o por $E(\xi)$, se define de la siguiente forma:

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

Ejemplo 10. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Determinar la esperanza de la variable.

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\,0\; dx + \int_{0}^{3} x \frac{1}{3}\, dx + \int_{3}^{\infty} x\,0\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

Propiedades de la esperanza: las mismas que para variable discreta (véase la sección 2 de esta unidad didáctica)

VARIANZA

La varianza de una variable aleatoria continua, que se representa por σ^2 o por $V(\xi)$, se define de la siguiente forma:

$$V(\xi) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Desarrollando el cuadrado de la última expresión, se puede obtener otra expresión para la varianza que facilita el cálculo de la misma.

$$V(\xi) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(\xi)^2$$

La varianza mide la dispersión, es decir, la proximidad o alejamiento de los valores que puede tomar la variable con respecto a la esperanza. Cuanto mayor sea la dispersión, mayor será la varianza y, por tanto, menos representativa será la esperanza.

Ejemplo 11. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Determinar la varianza de la variable.

$$V(\xi) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(\xi)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

siendo $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\, 0\, dx + \int_{0}^{3} x^2 \frac{1}{3}\, dx + \int_{3}^{\infty} x^2\, 0\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3$.

Propiedades de la varianza: las mismas que para variable discreta (véase la sección 2 de esta unidad didáctica).

DESVIACIÓN TÍPICA

La desviación típica, que se representará por σ, se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = +\sqrt{V(\xi)}$$

Esta medida presenta la ventaja de estar expresada en las mismas unidades que la variable aleatoria.

Ejemplo 12. Una variable aleatoria continua tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Determinar la desviación típica de la variable.

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por tanto, teniendo en cuenta el resultado obtenido en el ejemplo 11, se tiene que

$$\sigma = +\sqrt{V(\xi)} = +\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}86$$

Obsérvese que la esperanza, la varianza y la desviación típica de una variable aleatoria continua se determinan a partir de su función de densidad.

4. MODELOS DE PROBABILIDAD DE TIPO DISCRETO

Los modelos de probabilidad de tipo discreto representan fenómenos aleatorios que se modelizan mediante variables aleatorias discretas. En esta sección se presentan los dos principales modelos de tipo discreto: la distribución binomial y la distribución de Poisson.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Una variable aleatoria sigue una distribución binomial de parámetros n y p si su función de masa viene dada por la siguiente expresión:

$$p(\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,3,4,\ldots..n \\ 0 \ resto & \end{cases}$$

Si una variable sigue una distribución binomial, su esperanza y su varianza vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$E(\xi) = np \qquad\qquad V(\xi) = npq$$

La distribución binomial representa experimentos aleatorios que presentan tres características:

1. El experimento se repite varias veces. El parámetro n es el número de veces que se repite el experimento.
2. En cada repetición del experimento sólo se pueden presentar dos sucesos que son incompatibles que se representan por S y $\overline{S}$. Al suceso S se le asocia el número real 1 y al suceso $\overline{S}$ el número real 1.

$$S \to 1$$
$$\overline{S} \to 0$$

La probabilidad del suceso S se representa por la letra p y la de $\overline{S}$ por la letra q. Como los sucesos son contrarios, se tiene que $p = 1 - q$.

$$P(S) = p$$
$$P(\overline{S}) = q$$

3. Las repeticiones de los experimentos son independientes entre si.

Ejemplo 13. Se lanza una moneda tres veces y se considera la variable aleatoria ξ = número de caras obtenido. Determinar la probabilidad de obtener una sola cara.

En primer lugar, se determinará la distribución de probabilidad que sigue la variable.

1. Se lanza la moneda tres veces.
2. En cada lanzamiento sólo se pueden presentar dos sucesos “cara” y “cruz” que son incompatibles. Se asocia el número 1 al suceso en términos del cual está definida la variable.

$$C \to 1$$
$$X \to 0$$

La probabilidad del suceso al que se le asocia el número real 1 se representa por la letra p y la probabilidad del otro suceso por la letra q.

$$P(C) = p = \frac{1}{2}$$
$$P(\bar{S}) = q = \frac{1}{2}$$

3. Los resultados de los lanzamientos son independientes.

Por tanto, la variable aleatoria sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 3$ y $p = \frac{1}{2}$ lo que se escribe de forma abreviada como sigue $\xi \sim B(3, \frac{1}{2})$.

Se pide determinar la probabilidad de obtener una sola cara o lo es lo mismo que la variable tome valor 1.

$$P(\xi = 1) = \frac{3!}{1!\ 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Una variable aleatoria sigue una distribución de Poisson de parámetro λ si su función de masa viene dada por la siguiente expresión:

$$p(\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots\ldots \\ 0 & resto \end{cases}$$

Si una variable sigue una distribución de Poisson, su esperanza y su varianza vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$E(\xi) = \lambda \qquad\qquad V(\xi) = \lambda$$

Ejemplo 14. El número de automóviles que llega a una gasolinera en un minuto se puede modelizar mediante una distribución de Poisson. Suponga que el número medio es de 3,5 por minuto. Obtener la probabilidad de que en un minuto llegue un coche.

La variable sigue una distribución de Poisson de parámetro 3,5, puesto que el parámetro de la distribución de Poisson es la esperanza de la variable. Por tanto, $\xi \sim P(3{,}5)$

Se pide determinar la probabilidad de que llegue un coche o lo es lo mismo que la variable tome valor 1.

$$P(\xi = 1) = \frac{e^{-3{,}5}\, 3{,}5}{1!} = 0{,}1057$$

5. MODELOS DE PROBABILIDAD DE TIPO CONTINUO

En esta sección se presentan los principales modelos de probabilidad de tipo continuo: la distribución normal, la distribución χ^2 de Pearson, la distribución t de Student y la distribución F de Snedecor.

DISTRIBUCIÓN NORMAL N(μ,σ)

La distribución normal es la distribución más importante. Depende de dos parámetros μ que es la esperanza y σ que es la desviación típica. Su función de densidad viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \Re$$

La representación gráfica de esta función recibe el nombre de Campana de Gauss.

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR N(0,1)

La distribución Normal estándar es una distribución normal con esperanza 0 y desviación típica 1. Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \Re$$

Las probabilidades correspondientes a esta distribución de probabilidad se presentan en una tabla. Dicha tabla está en el anexo de esta unidad didáctica.

A continuación, se explicará como se utiliza dicha tabla.

La probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar sea mayor que un valor z_α se representará por α , es decir:

$$P(\xi \geq z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha$$

Las probabilidades son las áreas debajo de la función de densidad de la distribución normal (campana de Gauss). Por tanto, z_α es el valor que deja a la derecha un área α debajo de la campana de Gauss (véase la representación gráfica que aparece en la parte superior de la tabla).

Los valores de z_α se presentan con dos decimales. En la primera fila está el valor entero y el primer digito después del decimal y en la segunda fila el segundo dígito después del decimal. Las probabilidades o áreas son los valores que aparecen dentro de la tabla.

Ejemplo 15. Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar tome valores mayores que 1,25.

Para determinar la probabilidad se utilizará la tabla de la distribución normal estándar que se presenta en el anexo.

Se busca 1,2 en la primera columna y 0,05 en la primera fila. El valor correspondiente a esa fila y a esa columna que aparece dentro de la tabla es 0,1056. Por tanto,

$$P(\xi \geq 1{,}25) = 0{,}1056$$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA N(μ,σ) A PARTIR DE LA TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)

Para explicar como transformar una variable aleatoria normal con esperanza μ y desviación típica σ en una variable normal con esperanza 0 y varianza 1 es necesario, previamente, definir un concepto y enunciar un teorema.

VARIABLE TIPIFICADA

Sea ξ una variable aleatoria con esperanza μ y desviación típica σ.

La variable tipificada que se representará por ξ^* se define de la siguiente forma:

$$\xi^* = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

Propiedades:

1. La esperanza de una variable tipificada es igual a 0.

2. La varianza de una variable tipificada es igual a 1.

TEOREMA

Sea ξ una variable aleatoria que sigue una distribución normal. Se define una nueva variable $\xi' = a + b$. La variable aleatoria ξ' sigue una distribución normal.

Teniendo en cuenta el concepto y el teorema, a continuación se explicará como calcular probabilidades de una normal a partir de la tabla de la normal estandar.

Supóngase que se quiera calcular la probabilidad de que una variable aleatoria normal con esperanza μ y desviación típica σ tome valores mayores que x siendo x un número conocido.

Se procede de la siguiente forma: a cada lado de la desigualdad se resta la esperanza de la variable y se divide entre la desviación típica.

$$P(\xi > x) = P\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma} > \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(\xi^* > \frac{x - \mu}{\sigma})$$

A continuación, se explicara que la variable ξ^* que se ha generado sigue una distribución normal estándar.

1. ξ^* es una variable tipificada. Por tanto, tiene esperanza 0 y varianza 1.

2. ξ^* se ha generado a partir de ξ, restando la media y dividiendo entre la desviación típica. Por tanto, es una transformación lineal de ξ. Como ξ sigue una distribución normal, ξ^* también seguirá una distribución normal (por el teorema).

Ejemplo 16. Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria normal con esperanza 150 y desviación típica 25 tome valores mayores que 175.

$$P(\xi > 175) = P\left(\frac{\xi - 150}{25} > \frac{175 - 150}{25}\right) = P(\xi^* > 1) = 0{,}1587.$$

En primer lugar, se ha transformado la variable en una distribución normal con esperanza 0 y varianza 1, ya que esta es la distribución normal cuyas probabilidades están tabuladas.

Para ello, a cada lado de la desigualdad se ha restado la media de la variable y se ha dividido entre la desviación típica.

En segundo lugar, se determina la probabilidad a partir de la tabla de la distribución normal estandar que se presenta en el anexo de esta unidad didáctica.

DISTRIBUCIÓN χ^2 DE PEARSON

Sean $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ variables aleatorias N(0,1) e independientes entre sí. La distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad se define de la siguiente forma $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$. Para cada valor de n tendremos una distribución diferente.

Si una variable sigue una distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad, su esperanza y su varianza vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$E(\chi_n^2) = n \qquad V(\chi_n^2) = 2n.$$

Las probabilidades correspondientes a esta distribución de probabilidad se presentan en una tabla. Dicha tabla está en el anexo de esta unidad didáctica.

A continuación, se explicará como se utiliza dicha tabla.

La probabilidad de que una χ^2 de Pearson con n grados de libertad sea mayor o igual que un valor $\chi^2_{\alpha,n}$ se representará por α , es decir:

$$P(\chi^2_n \geq \chi^2_{\alpha,\,n}) = \int_{\chi^2_{\alpha,\,n}}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

siendo $f(x)$ la función de densidad de dicha distribución.

Las probabilidades son las áreas debajo de la función de densidad de la distribución. Por tanto, $\chi^2_{\alpha,n}$ es el valor que deja a la derecha un área α debajo de la función de densidad (véase la representación gráfica que aparece en la parte superior de la tabla).

En la primera columna se presentan los valores n , es decir, los grados de libertad de la distribución, y en la primera fila se encuentran los valores de α que son las probabilidades o áreas. Los valores $\chi^2_{\alpha,n}$ que dejan a la derecha dicha área se encuentran dentro de la tabla.

Ejemplo 17. Determinar la probabilidad de que una χ^2 de Pearson con 15 grados de libertad tome valores mayores o iguales que 7,261.

Para determinar la probabilidad se utilizará la tabla de la distribución χ^2 de Pearson que se presenta en el anexo.

Se busca 15 en la primera columna. En la fila correspondiente a 15, se busca el valor 7,261. La probabilidad es el valor que aparece en la primera fija y que corresponde a la columna en la que esta situado 7,261. Por tanto,

$$P(\chi^2_n \geq 7{,}261) = 0{,}95$$

DISTRIBUCIÓN *t* DE STUDENT

Sea X una N (0,1) e Y una χ^2 de Pearson con n grados de libertad independientes entre sí. La distribución t de Student con n grados de libertad se define de la siguiente forma:

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

Si una variable sigue una distribución t de Student con n grados de libertad, su esperanza y su varianza vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$E(t_n) = 0 \qquad V(t_n) = \frac{n}{n-2}$$

La representación gráfica de su función de densidad tiene forma de campana simétrica más aplanada que la campana de Gauss.

Las probabilidades correspondientes a esta distribución de probabilidad se presentan en una tabla. Dicha tabla está en el anexo de esta unidad didáctica.

A continuación, se explicará como se utiliza dicha tabla.

La probabilidad de que una t de Student con n grados de libertad sea mayor o igual que un valor $t_{\alpha,n}$ se representará por α , es decir:

$$P(t_n \geq t_{\alpha,\, n}) = \int_{t_{\alpha,\, n}}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

siendo $f(x)$ la función de densidad de dicha distribución.

Las probabilidades son las áreas debajo de la función de densidad de la distribución. Por tanto, $t_{\alpha,n}$ es el valor que deja a la derecha un área α debajo de la función de densidad (véase la representación gráfica que aparece en la parte superior de la tabla).

En la primera columna se presentan los valores n , es decir, los grados de libertad de la distribución, y en la primera fila se encuentran los valores de α que son las probabilidades o áreas. Los valores $t_{\alpha,n}$ que dejan a la derecha dicha área se encuentran dentro de la tabla.

Ejemplo 18. Determinar la probabilidad de que una t de Student con 9 grados de libertad tome valores mayores o iguales que 0,883.

Para determinar la probabilidad se utilizará la tabla de la distribución t de Student que se presenta en el anexo.

Se busca 9 en la primera columna. En la fila correspondiente a 9, se busca el valor 0,883. La probabilidad es el valor que aparece en la primera fija y que corresponde a la columna en la que esta situado 0,883. Por tanto,

$$P(t_9 \geq 0{,}883) = 0{,}2$$

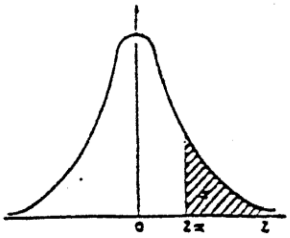
DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

Sea X una distribución χ^2 con m grados de libertad e Y una distribución χ^2 cuadrado con n grados de libertad. La distribución F de Snedecor con m, n grados de libertad se define de la siguiente forma:

$$F_{m,n} = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

Distribución normal $N(0, 1)$

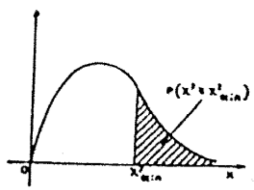
$$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = \alpha$$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00350	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

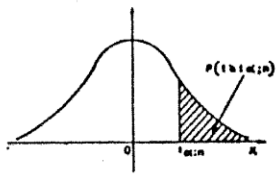
z_α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,00135	$0{,}0^{3}968$	$0{,}0^{3}687$	$0{,}0^{3}483$	$0{,}0^{3}337$	$0{,}0^{3}233$	$0{,}0^{3}159$	$0{,}0^{3}108$	$0{,}0^{4}723$	$0{,}0^{4}481$
4	$0{,}0^{4}317$	$0{,}0^{4}207$	$0{,}0^{4}133$	$0{,}0^{5}854$	$0{,}0^{5}541$	$0{,}0^{5}340$	$0{,}0^{5}211$	$0{,}0^{5}130$	$0{,}0^{6}793$	$0{,}0^{6}479$
5	$0{,}0^{6}287$	$0{,}0^{6}170$	$0{,}0^{7}996$	$0{,}0^{7}579$	$0{,}0^{7}333$	$0{,}0^{7}190$	$0{,}0^{7}107$	$0{,}0^{8}599$	$0{,}0^{8}332$	$0{,}0^{8}182$
6	$0{,}0^{9}987$	$0{,}0^{9}530$	$0{,}0^{9}282$	$0{,}0^{9}149$	$0{,}0^{10}777$	$0{,}0^{10}402$	$0{,}0^{10}206$	$0{,}0^{10}104$	$0{,}0^{11}523$	$0{,}0^{11}260$

Distribución χ^2



n \ α	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01
1	$0,0^4393$	$0,0^3157$	$0,0^3628$	0,0,982	0,00393	0,0158	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	0,312	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642
27	[illegible]	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892

Distribución t de Student



n \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,192	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,259	0,851	1,303	1,648	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,256	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

CUADROS

CUADRO 1. MODELOS DE PROBABILIDAD DE TIPO DISCRETO

Distribución Binomial	**Función de masa** $p(\xi = x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,3,4,\ldots..n \\ 0 & resto \end{cases}$ **Esperanza** $E(\xi) = np$ **Varianza** $V(\xi) = npq$ **Desviación típica** $\sigma = +\sqrt{npq}$
Distribución de Poisson	**Función de masa** $p(\xi = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots\ldots \\ 0 & resto \end{cases}$ **Esperanza** $E(\xi) = \lambda$ **Varianza** $V(\xi) = \lambda$ **Desviación típica** $\sigma = +\sqrt{\lambda}$

CUADRO 2. MODELOS DE PROBABILIDAD DE TIPO CONTINUO

Distribución Normal	**Función de densidad** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \Re$ **Esperanza** $E(\xi) = \mu$ **Varianza** $V(\xi) = \sigma^2$
Distribuciones derivadas de la Normal	**Distribución χ^2 de Pearson** $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$ **Distribución *t* de Student** $t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ **Distribución F de Snedecor** $F_{m,n} = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$

CONCLUSIONES

Cuando se está analizando una variable aleatoria se deben seguir una serie de etapas.

En primer lugar, hay que determinar el conjunto de valores que puede tomar la variable.

A continuación, se especifica su distribución de probabilidad (si la variable es discreta o su función de densidad (si la variable es continua).

Finalmente, se calculan las probabilidades de interés para el estudio que se esta realizando y las medidas que caracterizan a la variable, y se interpretan los resultados obtenidos.

RECAPITULACIÓN

Una **variable aleatoria** es una función que asocia a cada suceso elemental un número real. Las probabilidades de cada valor de la variable aleatoria son las mismas que las asociadas al suceso correspondiente.

Se distinguen dos tipos de variables aleatorias:

- **Variables aleatorias discretas**: son aquellas que toman valores aislados.
- **Variables aleatorias continuas**: son aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo.

Las variables aleatorias discretas se representan mediante la distribución de probabilidad (que proporciona la probabilidad puntual) y mediante la función de distribución (que proporciona la probabilidad acumulada).

Las variables aleatorias continuas se representan mediante la función de densidad (que proporciona la densidad de probabilidad) y mediante la función de distribución (que proporciona la probabilidad acumulada)

Las principales **medidas** que caracterizan a una variable aleatoria son: la esperanza, la varianza y la desviación típica.

Los principales **modelos de probabilidad discretos** son: la distribución binomial y la distribución de Poisson.

Los principales **modelos de probabilidad continuos** son: la distribución normal, la distribución t de Student, la distribución χ^2 de Pearson y la distribución F de Snedecor.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. Una variable aleatoria discreta es aquella que:
   a) Toma valores aislados.
   b) Puede tomar cualquier valor en un intervalo.
   c) Siempre toma el mismo valor.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

2. Se lanza un dado una vez y se considera la variable aleatoria “Puntuación obtenida”. La variable es:
   a) Discreta.
   b) Continua.
   c) Con esta información no es posible determinar si la variable es discreta o continua.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

3. La distribución de probabilidad o función de masa de una variable discreta nos proporciona:
   a) La probabilidad puntual.
   b) La probabilidad acumulada.
   c) La probabilidad puntual y la probabilidad acumulada.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

4. La función de distribución de una variable aleatoria discreta particularizada en un punto nos indica:

   a) La probabilidad puntual.

   b) La probabilidad acumulada.

   c) La probabilidad puntual y la probabilidad acumulada.

   d) Ninguna respuesta es correcta.

5. Para calcular probabilidades en variable aleatoria discreta, podemos utilizar:

   a) Únicamente la distribución de probabilidad.

   b) Únicamente la función de distribución.

   c) La función de distribución y la distribución de probabilidad.

   d) Ninguna de las respuestas es correcta.

6. La esperanza y la varianza de una variable aleatoria discreta se calculan a partir de:

   a) La distribución de probabilidad.

   b) La función de distribución.

   c) La función de distribución y la distribución de probabilidad.

   d) Ninguna respuesta es correcta.

7. Una caja contiene 10 piezas que han sido fabricadas de forma independiente. Se sabe que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es de 0,2. La variable aleatoria "número de piezas defectuosas en una caja" sigue una distribución.

   a) Binomial.

   b) Poisson.

   c) Normal.

   d) Ninguna respuesta es correcta.

8. Una variable aleatoria continua es aquella que:

   a) Toma valores aislados.

   b) Puede tomar cualquier valor en un intervalo.

   c) Siempre toma el mismo valor.

   d) Ninguna respuesta es correcta.

9. El área debajo de la función de densidad es igual a:

   a) 1.
   b) 0.
   c) Puede tomar cualquier valor.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

10. Para calcular probabilidades en variable aleatoria continua, podemos utilizar:

   a) Únicamente la función de densidad.
   b) Únicamente la función de distribución.
   c) La función de densidad y la función de distribución.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

SOLUCIONARIO

1.	a	2.	a	3.	a	4.	b	5.	c
6.	a	7.	a	8.	b	9.	a	10.	c

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Si estás interesado en ampliar los conocimientos sobre variables aleatorias, puedes consultar los capítulos 2, 4, 7, 8 y 9 del siguiente libro:

Martín Pliego F. J. y Ruiz Maya L. (1997). Estadística I: Probabilidad. Editorial Thomson.

BIBLIOGRAFÍA

Martín Pliego F. J. y Ruiz Maya L. (2006). Fundamentos de Probabilidad. Editorial Thomson.

Peralta Astudillo, M.J., Rúa Vieyes, A., Redondo Palomo, R., y del Campo Campos, C. (2007). Estadística. Problemas resueltos. Editorial Pirámide.